TD18

CONVERGENCE EN LOI.

Exercice 1 Échauffement.

1. Après ses études en école de commerce, Mouslim G. choisit d'ouvrir une boutique dans une rue qui mène au Sacré-Cœur. Mouslim vend des maillots de foot (aux couleurs du PSG) de ses deux joueurs préférés, Ousmane Dembélé et Vitor Vitinha, et il dispose d'un stock de 40 exemplaires de chaque maillot. Chaque client demande l'un ou l'autre des deux maillots avec probabilité $\frac{1}{2}$ et indépendamment des autres clients.

   Un samedi d'affluence, 60 clients se présentent dans la boutique. On note x la probabilité de l'événement : "Mouslim ne satisfait pas à la demande de tous ses clients".

   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un majorant de x.

2. Dans une rue voisine, Tancrède H. est un concurrent de Mouslim. Il vend des maillots (vintage) aux couleurs de RC Lens, et il dispose aussi de 40 exemplaires du maillot de Guillaume Warmuz, et de 40 exemplaires du maillot de Éric Sikora (avec lequel il offre le brassard de capitaine). Les 60 mêmes clients de Mouslim se présentent dans la boutique de Tancrède et choisissent un des deux maillots au hasard avec équiprobabilité et indépendamment, et bien sûr x est aussi la probabilité de l'événement : "Tancrède ne satisfait pas à la demande de tous ses clients".

   À l'aide du théorème limite centrale, donner un autre majorant de x.

3. Comparer la stratégie des deux vendeurs, et analyser la gestion des stocks qui en résulte.

Exercice 2 D'après **EML** 2014.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$. Par exemple si $n = 5$ et si les tirages successifs sont $5, 3, 2, 2, 6, 3$, alors $X_5 = 4$. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : étude du cas $n = 3$.

1. **a.** Exprimer l'événement $[X_3 = 4]$ à l'aide des variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

   b. Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{2}{3}$ et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : cas général $n \geqslant 2$.

3. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

5. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \frac{n-i+1}{n}.$$

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

7. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements

$$[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \cdots > N_k].$$

En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste vraie pour $k = 0$ et $k = 1$.

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

9. En déduire que

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]).$$

Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

10. Montrer que, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : une convergence en loi.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{k-1}{k!}.$$

12. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ telle que, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{k-1}{k!}.$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.

1. Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n.

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([0 \leqslant M_n \leqslant \sigma_n])$.

3. Écrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire M_n.

4. Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{2}}?$$

5. En déduire un programme Python qui approche la valeur de la probabilité calculée en **2**.

Exercice 4

Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geqslant \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right).$$

Exercice 5

Si le temps le permet, on pourra regarder aussi la fin de l'exercice 3 de **EML** 2017